¿Cómo usar Lagrange sin morir en el intento?*

José Vladimir García Martínez**

10 de octubre de 2020

Resumen

Este documento explicará cómo maximizar una función objetivo (función de utilidad) con una restricción, aplicado a problemas de economía. Tras leer este documento se espera que el lector pueda maximizar cualquier tipo de función dada una restricción. Es importante recalcar que no soy un experto en matemáticas, solo un aficionados con ganas de simplificar la curva de aprendizaje.

1. Un poco de historia

El método de multiplicadores de Lagrange es llamado así en honor al italiano Joseph Louis Lagrange. Su técnica tiene aplicaciones en diversos campos, como lo son la física, la astronomía y la economía. El método permite encontrar varios máximos o mínimos de una función, sujeto a una o varias restricciones.

A continuación, se explicará por pasos cómo trabajar en un problema de maximización de utilidad, sujeto únicamente a una restricción, utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

2. Identifique el problema

Antes que nada, debemos ver si la función de utilidad que tenemos se puede maximizar con el método de multiplicadores de Lagrange. Para saberlo, necesitamos cumplir las siguientes condiciones:

- El ejercicio debe tener una restricción, sino no será posible maximizarla pues el resultado sería indeterminado (Infinito).
- La ecuación debe ser no lineal, o sea, el exponente debe ser distinto de 1. Funciones de utilidad tales como sustitutos perfectos o complementos perfectos no podrán ser maximizadas a través de este método.

*Texto revisado por Nicole Peña

**Para contactar con el autor aquí su correo jvladi99@gmail.com

3. Plantee el problema

Esta parte es sencilla. Solo debe de indicar la acción que realizará: si maximizará la función o la minimizará[1].

$$\text{Max } U(x,y) \text{ sujeto a } R$$

$$\text{Min } U(x,y) \text{ sujeto a } R$$

4. La ecuación lagrangiana

La ecuación 1 es bastante simple de construir pues contiene la función de utilidad ya dada y la restricción multiplicada por un lambda.

$$L = U(x,y) + \lambda * R \tag{1}$$

Tome en cuenta que si mueve a la izquierda lo que se encuentra a la derecha, lambda λ será positivo (ecuación 3), pero si lo hace al revés, el mismo será negativo (ecuación 4). Tomemos como ejemplo la restricción presupuestaria de un individuo 2 en donde el ingreso m es el ingreso disponible, x la cantidad consumida del primer bien, p_x el precio del primer bien, y la cantidad consumida del segundo bien y p_y el precio del segundo bien.

$$m = xp_x + yp_y \tag{2}$$

$$L = U(x,y) + \lambda * (m - xp_x - yp_y) \tag{3}$$

$$L = U(x,y) - \lambda * (xp_x + yp_y - m) \tag{4}$$

La ecuación 2 indica que el monto monetario que gana un individuo será destinado completamente al consumo de ambos bienes, lo que matemáticamente quiere decir que el ingreso será igual a la cantidad adquirida del primer bien multiplicada por el precio del mismo sumado a la cantidad adquirida del segundo bien multiplicada por el precio del segundo.

[1] Siendo $U(x,y)$ la función de utilidad y R la restricción presupuestaria.

5. La diferenciación

La ecuación lagrangiana 1 deberá ser diferenciada parcialmente según la cantidad de variables y restricciones que esta posea. Un caso común en los ejercicios de economía es que sean dos variables x y y y que la misma posea solo una restricción. Siguiendo este hilo, tendríamos tres derivadas parciales: una con respecto a x, otra con respecto a y y otra con respeto al λ que multiplica la restricción. Es importante recalcar que λ será el **costo de oportunidad** entre los dos bienes.

$$\frac{dL}{dx} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{dL}{dy} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0 \tag{7}$$

Las derivadas son igualadas a 0, ya que se busca alcanzar el punto en que tanto la restricción como la función de utilidad sean tangentes.

6. ¿$\lambda = \lambda$?

Una vez se llega a este punto, se despeja λ de las ecuaciones 5 y 6. Si bien esto es válido para la mayoría de los problemas de economía, la realidad es que puede haber ejercicios más complicados de resolver en los que esta no sea la solución. En estos casos, se tendrá que ser creativo.

Volviendo a los casos regulares; luego de despejar λ se igualaran los resultados obtenidos luego de seguir las ecuaciones 5 y 6, y se procederá a despejar la variable x o la variable y. Dado que no es relevante cuál variable se decida despejar, es recomendable elegir la variable cuyo despeje sea más sencillo.

$$y = f(x) \tag{8}$$

$$x = f(y) \tag{9}$$

El resultado del proceso anterior debe de darle algo parecido a la ecuación 8 o 9, dependiendo de cual usted haya decidido despejar. Sin embargo, estas aún no son las cantidades óptima de cada bien, sino las demandas de cada uno, pues las ecuaciones están en función de otra variable, algo que no es deseable. Para solucionar este problema, inserte la ecuación 8 o 9 en la ecuación 7 sustituyendo x o y. Tenga en cuenta que la ecuación 7 será igual a su restricción, por lo que tomaremos la restricción presupuestaria (la ecuación 2) para ilustrar mejor la situación.

$$m = xp_x + f(x) * p_y \tag{10}$$

Si usted decide sustituir la ecuación 8 en la ecuación 2 debe de resultar en algo parecido a la ecuación 10. Luego despeje x para obtener x^*.

$$x^* = K \tag{11}$$

De hacerlo de manera correcta, tendrá como resultado la cantidad óptima de x (ecuación 11), donde K es una constante. Si decide no sustituir las constantes, entonces tendrá un conjunto de constantes expresadas en letras.

Como último paso, sustituya la ecuación 11 en la ecuación 9 para obtener la cantidad óptima[2] del bien y^*, llegando a la ecuación 12[3].

$$y^* = K \tag{12}$$

7. Método alternativo

Otra forma de encontrar la canasta óptima $(x, y)^*$ es a través del método de la **tasa marginal de sustitución** abreviando como TMS. Recordando que la tasa marginal de sustitución se encuentra dividiendo la utilidad marginal de x entre la utilidad marginal de y, resultando en la ecuación 13.

$$TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} \tag{13}$$

Luego de haber encontrado la tasa marginal de sustitución (la pendiente de la curva de indiferencia) se iguala a la relación de precios $\frac{p_x}{p_y}$ (la pendiente de la restricción presupuestaria) dando como resultado la ecuación 14

$$\frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y} \tag{14}$$

Tras pasar este paso le quedará algo parecido a la ecuación 9 o 8, depende de cual variable usted haya despejado. A partir de aquí todo es igual al método de Lagrange; se sustituye una de las variables en la restricción (ecuación 2), dando como resultado la ecuación 10. Luego se despeja la variable, quedando la ecuación 11 y se sustituye en la ecuación 8 para obtener y^* (la ecuación 12). Con este proceso se encontrará también la canasta óptima $(x, y)^*$.

[2]Los * significan que son las cantidades óptimas de cada bien. Por esto, no pueden incluir variables de ningún tipo; de llegar a pasar, entonces revise el proceso.

[3]Otra alternativa al método de multiplicadores de Lagrange es igualar la *tasa marginal de sustitución* a la relación de precios. La *tasa marginal de sustitución* se encuentra dividiendo utilidad marginal de x entre la utilidad marginal de y.

8. Reglas generales de la derivada

Aquí algunas identidades que podrían ser de utilidad a la hora de realizar ejercicios de maximización por el método de multiplicadores de Lagrange.

Derivadas generales

Regla	Función	Derivada
Constante	$y = k$	$y' = 0$
Identidad	$y = x$	$y' = 1$
Potencia	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
Constante por función	$y = k * f(x)$	$y' = k * f'_x$
Suma o resta	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'_x \pm g'_x$
Producto	$y = f(x) * g(x)$	$y' = f'_x * g(x) + f(x) * g'_x$
Cociente	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'_x * g(x) - f(x) * g'_x}{[g(x)]^2}$
Regla de la cadena	$y = [f(x)]^n$	$y' = n * [f(x)]^{n-1} * f'_x$